

●優秀賞

統計資料を取り入れた
数学的モデリングの
教材開発長野県長野市立柳町中学校 あら い 新井 ひとし 仁

〈要約〉

本研究の目的は、統計資料を取り入れた数学的モデリングの教材開発を行うことにある。筆者の自家用車買い換えに伴い、旧車両と新車両の燃料費と給油量の統計資料に基づき、新車両がもたらす経済面及び環境面への効果がどの程度期待できるかを考える授業を試みた。生徒は、統計資料から関数による数学的モデルとして一次回帰グラフと式を作成した後、係数や定数をもつ意味を読み取ってモデルを修正したり、線形回帰の妥当性を考えたりした。そして、両車両を10年間使用すると仮定した場合の燃料費と給油量のそれぞれの差を予測し、結論をまとめた。このような生徒の姿から、教材「新車両購入と環境問題」の有効性を認め、さらに、数値に対する多面的な見方の育成において、統計資料を取り入れた数学的モデリングの有効性に関する私見を示すことができた。

1. 研究の目的・方法

改訂学習指導要領では、統計に関する学習の充実が図られ、中学校数学科では「資料の活用」領域が新設された。しかし、これにより、「関数」領域の学習と、いわゆる統計に関する学習がそれぞれ独立したものになりがちであるように感じる。中学校学習指導要領解説数学編には、「日常生活や社会における問題を理想化したり単純

化したりすることによって定式化し、数学の世界で処理して、その結果の意味を日常生活や社会において解明し、問題を解決する活動」の重要性が示されており、数値に対する柔軟かつ多面的な見方が必要になることが少なくない。日常生活や社会で数学を利用するとした場合、不確実性を伴う事象に対して、数学的根拠に基づいて予測や判断を行うことが求められ、このような能力の育成が可能になる学習を具体化するための教材を開発することが、本研究の目的である。そこで、新たに取り上げた教材「新車両購入と環境問題」による授業を行い、授業記録や生徒の記述を分析し、教材の価値について考察する。

2. 教材の概要

(1) 関数領域で統計資料を用いること

一次関数としてとらえられる事象は身の回りに多くみられるが、比較的關係が単純である。一方、統計資料は特定の関数としてとらえにくく、何らかの関数関係が成り立つものと仮定して考える必要がある場合が多い。そこで、統計資料を用いることを考えた。

(2) 素材とその分析

筆者は、今年度当初に250万円で自家用車を買換えた。車種は、ライフスタイルに基づいて検討し、決定した。なお、旧車両はN車、

新車両はH車（エコカー）である。自家用車の購入は安い買い物ではなく、ふと「買い換える必要はなかったのではないか」という疑念も抱く。しかし、旧車両の老朽化や燃費などを考えると、環境問題も絡み、高いか安いかわけの問題でもない。

筆者は、新車両購入前にカタログなどから得た情報に基づいて色々計算してみたり、グラフを作成してみたりしながら車種を検討した。そして新車両を購入して5ヶ月が経過した8月、それまで実際に乗ってみて性能を実感し、改めて今回の購入によってどのようなよいことが期待できるかと思いを巡らすようになった。そこで、新車両を今後10年間使うとして、次のようなことを調べてみたいと考えた。

- ◇旧車両1年間（平成21年度）の実際に必要とした燃料費と給油量の統計資料から、この先10年間使うとした場合に必要となりそうな燃料費と給油量を予測する。
- ◇新車両購入以降の5ヶ月間の燃料費と給油量の統計資料から、この先10年間使

うとした場合に必要となりそうな燃料費と給油量を予測する。

- ◇両者を比較して、新車両がもたらす経済面及び環境面への効果がどの程度期待できそうかを明らかにし、これを窓口として新車両購入の意義について考える。

上記のことを調べるための統計資料は、表1のとおりである。

自家用車の使用については、長距離走行の日もあれば、全く走行しない日もある。また、給油時の単価によっても燃料費は変わる。給油から給油までの期間が若干長い時期や、給油量に対して燃料費が割高になっている時期は、散布図にすると点の配列を観察することで発見しやすくなる。そして、なぜそのようなことが起きたのか、その根拠を探ることによって、筆者の自家用車の使用状況や燃料単価の変動などが関係していることに気づき、数値を窓口として現実事象を検証する機会を得て、数値に対する多面的な見方を行うことにつながる。散布図に表すと、点の配列の様子から単純に線型モデルと考えてよさそうだと認められるが、線型モデル

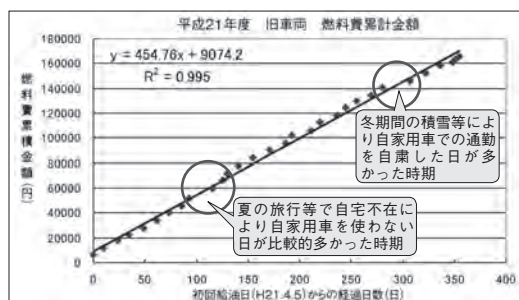
●表1／年度当初からの経過日数と累積給油量及び累積金額の統計資料（レシートの記載事項より）

N車（旧車両）平成21年度											
給油 年 月 日	給油量 (ℓ)	1ℓ単価 (円)	金額 (円)	経過日数 (日)	累積給油量 (ℓ)	累積金額 (円)	給油 年 月 日	給油量 (ℓ)	1ℓ単価 (円)	金額 (円)	経過日数 (日)
平成21年4月5日	52.30	114	5962	0	52.30	5962	平成21年10月8日	42.92	128	5494	186
平成21年4月15日	52.00	114	5928	10	104.30	11890	平成21年10月14日	46.80	128	5990	192
平成21年4月29日	50.10	117	5862	24	154.40	17752	平成21年11月2日	33.74	126	4251	211
平成21年5月10日	43.00	117	5031	35	197.40	22783	平成21年11月10日	50.00	126	6300	219
平成21年5月24日	44.50	117	5207	49	241.90	27989	平成21年11月27日	47.20	124	5853	236
平成21年6月6日	47.70	121	5772	62	289.60	33761	平成21年12月5日	49.00	124	6076	244
平成21年6月17日	52.00	121	6292	73	341.60	40053	平成21年12月16日	42.70	124	5295	255
平成21年6月29日	45.01	124	5581	85	386.61	45634	平成21年12月30日	41.50	123	5105	269
平成21年7月7日	52.60	124	6522	93	439.21	52157	平成22年1月10日	48.60	123	5978	280
平成21年7月30日	58.30	127	7404	116	497.51	59561	平成22年2月7日	41.44	126	5221	307
平成21年8月8日	50.50	127	6414	125	548.01	65974	平成22年2月22日	51.00	126	6426	322
平成21年8月13日	45.30	127	5753	130	593.31	71727	平成22年3月8日	47.50	123	5843	336
平成21年8月23日	46.40	127	5893	140	639.71	77620	平成22年3月20日	20.07	136	2730	348
平成21年9月7日	50.00	130	6500	155	689.71	84120	平成22年3月22日	20.00	123	2460	350
平成21年9月23日	48.80	128	6246	171	738.51	90367	平成22年3月27日	20.00	126	2520	355
H車（新車両）平成22年度4月～8月											
給油 年 月 日	給油量 (ℓ)	1ℓ単価 (円)	金額 (円)	経過日数 (日)	累積給油量 (ℓ)	累積金額 (円)	給油 年 月 日	給油量 (ℓ)	1ℓ単価 (円)	金額 (円)	経過日数 (日)
平成22年4月17日	39.30	129	5070	0	39.30	5070	平成22年7月8日	38.00	131	4978	82
平成22年4月30日	36.60	134	4904	13	75.90	9974	平成22年7月18日	39.10	132	5161	91
平成22年5月9日	39.00	134	5226	22	114.90	15200	平成22年8月1日	41.72	129	5382	106
平成22年5月24日	39.00	134	5226	37	153.90	20426	平成22年8月5日	40.80	129	5263	110
平成22年6月9日	38.10	134	5105	53	192.00	25532	平成22年8月13日	39.30	129	5070	118
平成22年6月22日	39.52	134	5296	66	231.52	30827	平成22年8月28日	40.41	129	5213	133

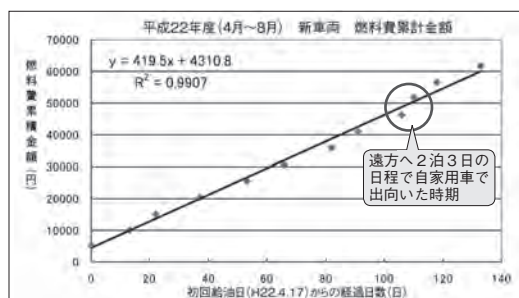
と判断したことの妥当性についても考える必要がある。したがって、今回用いた統計資料に示された数値は、不確実性を伴うからこそ数学的モデリングの対象として価値があるものだと考える。

① 燃料費の予測と比較分析

旧車両と新車両のそれぞれについて、各車両の初回給油日を基準日とした経過日数を x 日、給油日に支払った燃料費を y 円として、散布図に表して線形回帰が妥当だと判断した上で一次回帰グラフを求めると、次のようになる（図1・2）。



●図1／旧車両一次回帰グラフ $y = 454.76x + 9074.2$



●図2／新車両一次回帰グラフ $y = 419.5x + 4310.8$

10年後を3650日後と考え、 $x=3650$ をそれぞれの式に代入することにより、次のような結果が得られる。

- ・旧車両の予測燃料費…1668948.2円
- ・新車両の予測燃料費…1535485.8円
- 予測燃料費の差…1668948.2 - 1535485.8
- =133462.4円→約13万円

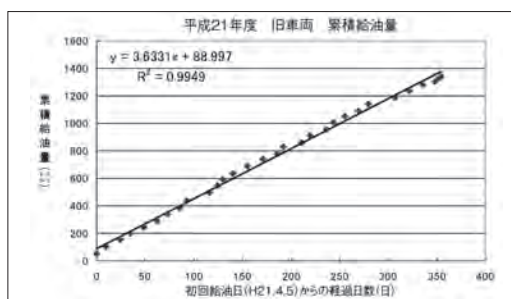
つまり、旧車両を10年間使うとした場合に対して、新車両を10年間使うとした場合のほうが、燃料費は結果として約13万円安くなる

ことが期待できる。

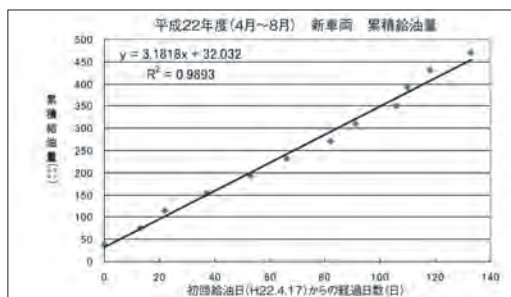
なお、一次回帰式の x の係数は、1日あたりの燃料費を表しているととらえると、筆者のライフスタイルからほぼ一定の割合だと考えてよさそうで、線形回帰は妥当な判断だという根拠になる。

② 給油量の予測と比較分析

燃料費と同様に、給油量を y ℓとし、散布図に表して線形回帰が妥当だと判断した上で回帰グラフを求めると、次のようになる（図3・4）。



●図3／旧車両一次回帰グラフ $y = 3.6331x + 88.997$



●図4／新車両一次回帰グラフ $y = 3.1818x + 32.032$

10年後を3650日後と考え、 $x=3650$ をそれぞれの式に代入することにより、次のような結果が得られる。

- ・旧車両の予測燃料量…13349.812ℓ
- ・新車両の予測燃料量…11645.602ℓ
- 予測燃料量の差…13349.812 - 11645.602
- =1704.21ℓ→約1700ℓ

つまり、旧車両を10年間使うとした場合に対して、新車両を10年間使うとした場合のほうが、給油量は結果として約1700ℓの節約になることが期待できる。

なお、一次回帰式の x の係数は、1日あたり

の燃料の消費量を表しているにとらえると、燃料費同様線形回帰は妥当な判断だという根拠になる。

(3) 教材化

新車両（エコカー）のみの燃料費や給油量を取り上げても、燃料費や給油量の推移を調べるだけで終わるが、旧車両と新車両を比較することで、エコカーの効果がみえてくる。そして、環境問題についても考えを深められることが期待できる。また、給油量の差が数値で得られても、漠然としたイメージしかつかめない可能性がある。右のような資料を提供することにより、二酸化炭素の排出量に換算して実感を伴って考えられるようにする。これには、生徒に量感覚を身につけさせたいという願いも込められている。



3. 授業の実際

(1) 単元 第2学年「一次関数」

(2) 題材 「新車両購入と環境問題」

(3) 授業実施日 平成22年9月7日

(4) 授業実施校・学級 長野市立柳町中学校・2年1組（35名）

(5) 本時の主眼

旧車両と新車両の給油量の違いを調べる場面で、過去の給油量に関する資料を散布図に表して観察することを通して、点がほぼ直線状に並

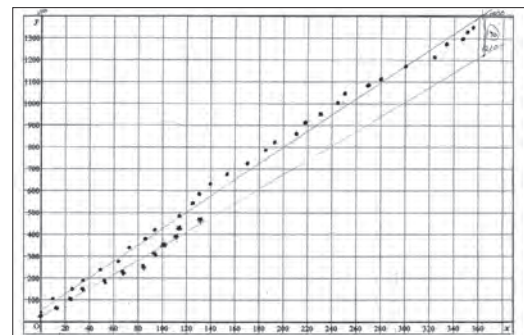
んでいることから経過日数と累積給油量の関係を一次関数とみてよさそうだとすることに気づき、環境問題について考えるとともに、関数関係が成り立つものと仮定して問題を解決する方法を理解する。

(6) 授業の様子

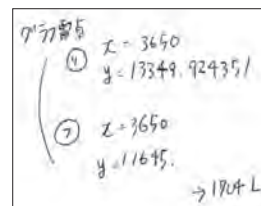
前時、新旧両車両を10年間使うとした場合、統計資料（表1）に基づく燃料費は約13万円節約できそうだと予測しながら、それほど大きな金額ではないと感じた生徒が多かった。そこで、経済面ばかりでなく、環境面にも目を向けてほしいと願い、「新旧両車両を10年間使うとした場合の給油量の違いが及ぼす環境への影響はどうなるだろうか」と問いかけ、学習課題を設定した。

① H.A生とN.K生の追究の様子

H.A生は、手がきの散布図から1年間で約190ℓ節約できると判断し（図5）、これを10倍して10年間で約1900ℓの燃料の節約になると予測した。また、N.K生は、グラフ電卓で一次回帰グラフと式を求め、式から10年で約1704ℓの節約になると予測した（図6）。隣同



●図5／H.A生の記述



●図6／N.K生の記述



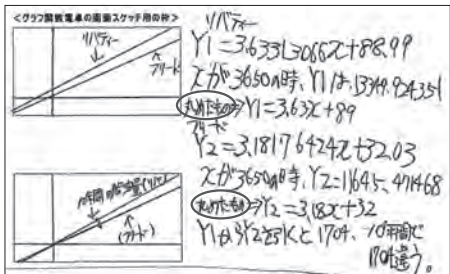
対話するH.A生とN.K生

士のH.A生とN.K生は、お互いの予測値を比較して、「手がきのグラフでは限界があるのだろう」とか、「グラフ電卓で求めた直線のほうが正確なのだろう」などと対話した。

H.A生の考え方は、二つのグラフが原点を通る直線（比例のグラフ）であれば通用するのだが、比例ではない直線のグラフであるこの場合は正しくない。2直線が平行になるような極端な場合を考えれば考え方の誤りに気づいただろうが、二人の議論の中では、予測値の差は手がきグラフとグラフ電卓による回帰グラフの精度の差ということ以外に話題とされることはなかった。これは、予測値の差が許容範囲だと考えられる大きさだったためだとも思われる。しかし、H.A生の考えたことは、後に他の生徒に数学的モデルの修正の必要性を考えるきっかけを与えることになった。

② I.K生の追究の様子

I.K生は、図7のように記述した。I.K生が二つの回帰グラフの式から10年後のそれぞれの給油量を予測したことを確認した後、「丸めたもの」（図中○部）という記述について教師と次のように対話した。

教師1	「丸めたもの」と書いて式が示されていますが、これはどういうことですか？
	
生徒1 [I.K生]	xの係数と定数が細かすぎて計算が大変だから、適当な桁で四捨五入しました。
教師2	四捨五入してもいいのですか？
生徒1 [I.K生]	xの係数は、1日あたりの燃料の消

●図7 / I.K生の記述

費量だと考えられるから、それほど細かい数値は必要ないと思いました。それから、定数は回帰グラフで勝手に出てきたものだから、これもそれほど細かくなくてもいいと思いました。

そして、丸めた式（修正モデル）に基づいて計算した結果、10年間使用した場合に1704ℓの節約になることを示し、自分が考えたことの妥当性を説明した。

③ 全体追究による問題解決

まず、H.A生に発表を促し、学級全体での追究に入った。

生徒3 [H.A生]	私は、手でかいた散布図の365日後（1年後）のところで
	
考えを発表するH.A生	
の目盛りから、1年間で約190ℓの差になると読み取ったので、これを10倍して10年間で約1900ℓの節約になると考えました。	
教師3	A.A君は、どのようにになりましたか？
生徒4 [A.A生]	僕はグラフ電卓で一次回帰グラフを求めて、 $x=3650$ のときのそれぞれの y の値を読み取ってから差を求めました。
その結果、だいたい13349-11645で、約1704ℓになりました。	
教師4	式の係数と定数を簡単にした人はいますか？F.Aさん、どうですか？
生徒5 [F.A生]	数値が細かすぎるので、旧車両の式を $y_1=3.63x+89$ 、新車両の式を $y_2=3.18x+32$ としました。 y_1 と y_2 のそれぞれの x の係数(3.63と3.18)は、新旧両車両それぞれの1日あ

	たりの使用燃料量（の平均）だと考えられるから、それほど細かい数値を求めても意味がないし、一定の割合だと考えてよさそうだと思います。
生徒 6	1日あたり、旧車両だと3.63ℓ、新車両だと3.18ℓの燃料を使うということだから、新車両のほうが燃料の節約になることは間違いなさそうです。
教師 5	グラフを拡大して確認しますね。（プロジェクトで拡大）Y.T君、自分で追究した内容を説明してください。
生徒 7 [Y.T 生]	10年後は $x=3650$ だから、$x=3650$ のときのそれぞれの y 座標を調べると、だいたい $y_1=13350$、$y_2=11645$ だから、これらの差を求めて約1705ℓの節約になると考えました。
教師 6	さて、H.Aさんは手がきの散布図から約1900ℓ、A.A君は一回帰グラフで求めた数値をそのまま使って約1704ℓ、そしてY.T君は数値を簡単にして約1705ℓという予測値を導いてくれましたね。

他の生徒にも予測値を尋ねたところ、1700ℓ～2000ℓの間に予測値が集まった。後の計算のしやすさを考え、約2000ℓの節約になるという予測を共有することにした。この後、実感を伴って環境問題について考えられるように、節約が期待できる燃料を二酸化炭素の排出量に換算した。

教師 7	約2000ℓの節約、イメージできますか？（資料「1ℓの燃料が排出する二酸化炭素」を提示して）自動車が行くと、燃料1ℓから約1000ℓの二酸化炭素が排出され
------	--

生徒 8	ることです。10年間でどれくらいの二酸化炭素の排出を抑えられそうか、計算してごらん。
教師 8	(2000×1000 を計算して) 10年間で200万ℓの二酸化炭素の排出を抑えられます。
生徒 9	そうですね。200万ℓとなると、かなり多そうですね…でも、どれくらいのイメージでしょうか。ちなみに、学校のプール1杯が約35万ℓだそうです。学校のプールに換算したら、何杯分でしょうか？
教師 9	($200 \text{ 万} \div 35 \text{ 万}$ を計算して) 約5.7杯分！約5.7杯分ですね。前回の授業では、10年間で13万円程度の節約にしかならず、大金支払っての購入に対して否定的な考えも出てきましたが、私は一人で10年間でプール約5.7杯分もの二酸化炭素の排出を抑えることができそうだということです。皆さん、地球環境のことを考えると、どう思いますか？
生徒 10 [I.S 生]	10年間で節約できる金額は約13万円だったから、買い換えはあまり意味がなかったように感じたけれど、二酸化炭素の排出量で考えると、地球環境にはかなりよい買い物だったと思います。

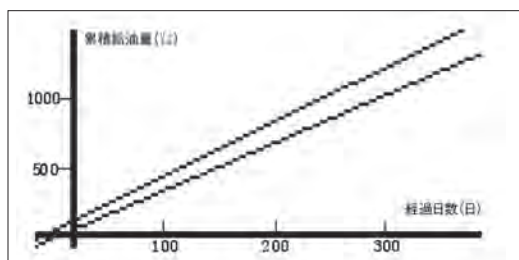


結論を述べる I.S 生

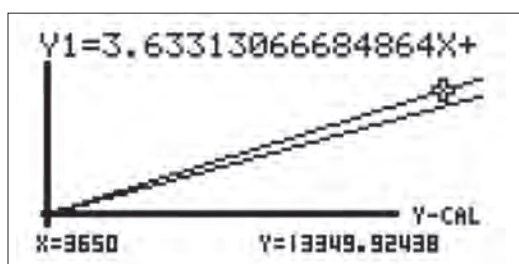
4. 授業の考察

(1) 授業における生徒の様子から

H.A生は、まず散布図を作成し、これに基づいて1年後までのグラフをかいた。これと同じことをグラフ電卓を使って行くと、図8のようになる。一方、N.K生がグラフ電卓を使って追



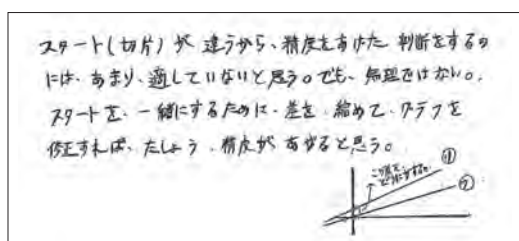
● 図8



● 図9

究した際に表示した画面は、図9のようになる。比較すると、散布図は1年間分の資料を画面上に示しているため切片は大きな影響を与えるが、座標平面を10年先まで表示できるようにすると切片は相対的に極めて小さくなり、ほぼ比例だとみることができる。つまり、H.A 生の考え方は、1年間で生じる差の10倍が10年後の差になると考えたところに問題点があったといえる。このことについて、N.K 生は、「スタート(切片)が違うから、精度を上げた判断をするには、あまり適していない」と述べながらも、「スタートを一緒にするために、差を縮めてグラフを修正すれば多少精度が上がる」とまとめている。比例のモデルまで修正してもよさそうだと考え始めている様子が見える(図10)。

I.K 生はグラフの数値を丸めて修正モデルを作成した。A.A 生も修正モデルを作成したが、



● 図10 / N.K 生の記述

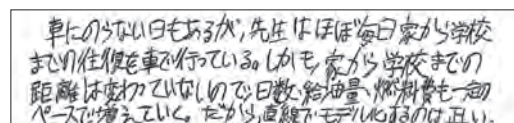
グラフ上の点の座標を読み取って差を求めただけで、線形回帰したことの妥当性を探りながら式の意味を考えるまでには至っていない。これらに対し、F.A 生は、求めた回帰式の x の係数がもつ意味を考え、数値を丸めて幅をもってみることや、線形回帰することの妥当性についても考えている(生徒5)。これは、I.K 生や A.A 生の数値処理とは一線を画している。さらに、F.A 生の発言は、他の生徒が式の意味を読み取るきっかけともなっており(生徒6)、これらは、数値に対して多面的な見方を行っている具体の姿であるものと考えられる。

最終的に、節約が期待できる燃料量を二酸化炭素の排出量に換算し、さらに身近なプールの容積と比較させることで、生徒は新車両購入の意義について実感を伴って考え、結論を導き出した(生徒10)。数学的モデリングによって得られた数学的結果は、現実事象に立ち返って検証することが重要であり、このような行為を具体化させるために量感覚を伴って考えられるような場を設定することが、一つの有効な手段であるといえよう。

(2) ワークシートへの生徒の記述から

① 一次関数とみたことの妥当性について

散布図の点の配列から、線形回帰すればよさそうであることは容易に思いつくが、だからこそ線形回帰の妥当性を現実事象と照合して考える必要がある。筆者が自家用車を使う目的は、年に数回の特別な場合を除いて通勤が主であるため、基本的にはほぼ一定のペースで使っていると考えてよい。I.T 生は、筆者のライフスタイルを根拠に、線形回帰が妥当であることを説明している(図11)。これは、日常生活における不確実性を伴う事象に対して、数学的根拠に基づいて予測や判断の方法の妥当性を考えてい

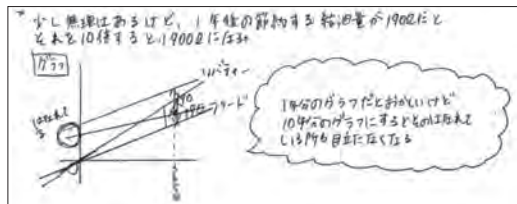


● 図11 / I.T 生の記述

る姿である。

② 1年後の差を10倍して予測した方法について

F.M生は、 x の係数や定数（ y 切片）の数値を四捨五入して丸めるだけでなく、1年後の差を10倍したことの妥当性について考え、モデルを再修正して比例まで単純にしても差し支えないと考えている（図12）。実際、比例モデルに修正すれば、差を直接用いた比例的推論によって予測することが可能となり、H.A生の考え方が生かされることになる。現実事象を振り返れば、定数は購入当初の給油量ということになり、0として考えた方がむしろ妥当なのかもしれない。現実事象をモデル化するサイクルを繰り返すことが、資料や数値に対する多面的な見方を育成することにつながるものと考えられる。



●図12 / F.M生の記述

5. 結語と今後の課題

身の回りにみられる現実事象から得られた統計資料の多くは、不確実性を伴うものである。このような統計資料に基づいた数学的モデリングは、問題解決のために数値を柔軟かつ多面的にみる機会を提供できる価値がある。また、数学モデルを作成した後、現実事象に照らし合わせて検証することにより、数学的モデリングの妥当性の根拠を得たり、さらなる修正モデルの作成に発展したりすることができる。これは、身の回りで数学が役に立つというメッセージを伝えることにもなると考える。

「資料の活用」領域が新設され、統計資料は「資料の活用」領域での扱いが主流になりがちだが、本稿で示したとおり、目的に応じて統計

的な観点や手法によって分析を行うこともあれば、関数的な観点や手法によって分析することが必要になる場合も往々にしてあり得る。今後、「関数」領域と「資料の活用」領域の相互の学習の関連を図り、資料や数値に対する多面的な見方を育成するための教材の開発及び教材配列の整備が必要であると考ええる。

<引用・参考文献>

- ・新井仁・西村圭一（2010）「データに対する多面的な見方を育成する数学的モデリングの教材開発」. 日本科学教育学会年会論文集 34.pp.133-136
- ・文部科学省（2008）「中学校学習指導要領解説 数学編」. 教育出版 .p94