● **最優秀賞**

実験・観察をとり入れた関数の学習 ――グラフ電卓を利用して――

岡山県倉敷市立南中学校　川上公一（かわかみこういち）

1　はじめに

　数学の学習において，「数学的活動の楽しさ」が求められている。そのために観察・操作や実験などの活動をいっそう重視しなければならない。数量関係の領域ではさまざまな実験を通して数理を探求し，数学的に解決する方法を身につけることをめざしたい。

　比例・反比例や一次関数ととらえられる事象は，身の回りに多く見られる。しかし関係が単純であるため，変化の様子を予想しやすく，実験に対する興味関心を引き出しにくい場合が多い。そこで予想がやや立てにくい事象を取り上げ，実験や観察を中心とした授業を展開しようと考えた。これらの活動に課題意識を持って取り組むことにより，実験・観察の必要性を感得したり，科学的な方法を身につけたりする態度も養いたい。

　学習指導要領改訂で削除された統計の単元で学習してきた素材の中には，関数の内容として，関数関係を見いだし，表現し，考察する能力を養うために有効なものが多い。グラフ電卓等のテクノロジーを利用することにより，データの処理は簡単になり，関数として考察できるようになる。実験や観察の結果を数学的にとらえるためにグラフ電卓を積極的に利用する。本実践では，グラフ電卓のデータ処理機能を利用し，得られたデータを自動的に回帰した。このような活動を「［数学的手法によって現象を解明する］という数学の応用的側面を強調した学習活動」(1) の実践例として位置付けたい。

　その際最も必要であるのは，身近な事象をとらえ，それを数学の対象として考察しようとする数学的モデリングである。数学的モデリングの過程(**図1**)をとり入れることにより，数理はより体系的かつ具体的となり，科学的判断・決定を支えるようになる。

Real Model	→	Math Model
↑		↓
Real Situation	←	Math Results

●**図1**／数学的モデリングの過程例

2　比例の事例「Go！ Go！Qちゃん」

(1) とり上げる資料

　2001年９月ベルリンマラソンで高橋尚子選手が，女子として世界で初めて20分の壁を破る２時間19分46秒の記録を樹立した。このときのスプリットタイム(５㎞ごとにかかった時間の累積)が次の表である。このようなデータは，インターネットを利用すれば，比較的簡単に入手できる。このデータを材料にして，比例の学習をまとめる授業を行った。

距　離	スプリットタイム	スプリットタイム2
S→5キロ	16分46秒	16分46秒
5→10キロ	33分11秒	33分11秒
10→15キロ	49分32秒	49分32秒
15→20キロ	1時間06分11秒	66分11秒
20→25キロ	1時間22分30秒	82分30秒
25→30キロ	1時間39分02秒	99分02秒
30→35キロ	1時間55分30秒	115分30秒
35→40キロ	2時間12分11秒	132分11秒
40→G	2時間19分46秒	139分46秒

●**図2**／スプリットタイム

(2) 授業のようす

①T：距離と時間の関係をグラフで表そう。
(Tは教師，Pは生徒を示す。以下同様)

②T：点がとれたら，原点(スタート)とゴールを直線で結んでみよう。

③T：グラフからどんなことに気がつきましたか。

P：全部の点が，だいたい線の上にある。

P：正比例。

T：「全部の点が，だいたい線の上にある」というのはどういうことなのだろう。

P：ずっと，一緒の速さで走っているんだ。

④T：高橋選手はどのくらいの速さで走っているのだろう。

2時間20分で42km走ると考えると…。

P：42÷140＝0.3

T：0.3ってどういう意味のある数なんだろう。

P：分速0.3km

T：これで，式で表せますね。

P：$y=0.3x$

P：1分で300m。1秒で5mだね。

P：すごいよ。50mを10秒で，走るんだ。

T：その速さで，42km走るんだよ。

P：シャトルランだよ。

P：シャトルランは20メートルだよ。

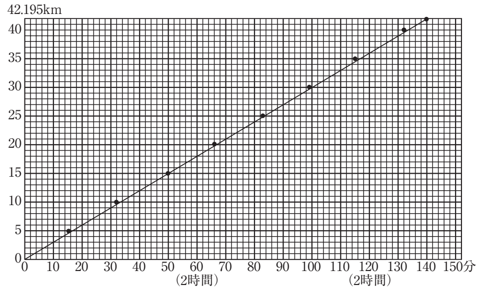
T：みんなが体力テストでやったシャトルランは，一定の時間で20mを走り，それを何回走れるかを数えるものでしたね。高橋選手は2.5倍の50mを走るんです。それを何回繰り返したの。

P：840回!!

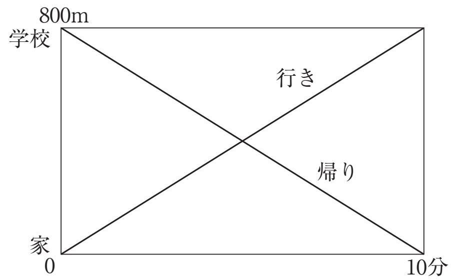
⑤T：同じようなグラフを自分の登下校についてつくってみましょう。出発してx分後に家からymの距離の位置にいるとしてグラフをつくります。

T：x軸に学校に着くまでにかかる時間を，y軸に学校までの距離を書き入れましょう。高橋選手と同じようなグラフがかけますね。

T：それでは，下校時のようすは，どのように表現できるでしょう。(図4)
時間がたつほど，家が近くなりますね。



●図3／変化のようす



●図4／登下校のようすのグラフ

(3) 考察と教材の評価

高橋選手のマラソンのようすをグラフとして表現し，その変化のようすが一定であることを理解した。自分たちの50m走と比較すること，あるいはシャトルランとしてとらえることで，より具体的で身近な事柄に置き換えることができた。

関数的な見方・考え方として，ある数量を他の数量と比較・置換して検討する見方がある。例えば，不動産の広告で「駅から10分」等の表現である。これは距離を時間と置き換えることにより，より直観的に表現したものであり，関数的見方の代表的なものであるといわれる。50m走やシャトルランとしてとらえることは，数学的な見方や考え方を拡張する一つの姿である。新しく獲得した「知」と既知を結びつけようとするとき，最も必要なのは，メタ認知の力である。シャトルランは，本実践の直前に

実施されており，生徒の印象に深く残っているはずだが，教材を結びつけることができる生徒はきわめて少数である。

数学的モデリングの過程を重視することで，このような学力を高めることができるようになる。本時の学習の流れを数学的モデリングの過程と比較すると次のようになる。

Real Model

高橋選手のベルリンマラソンの結果を見る。

スプリットタイムを確認する。

Math Model

スプリットタイムからグラフを作る。

「2時間20分で42km走った」とデータを理想化する。

Math Results

一定の速さで走っていることを納得する。

$y=0.3x$と表現する。

Real Situation

他の数量と比較・置換して検討する。

(50m走・シャトルラン)

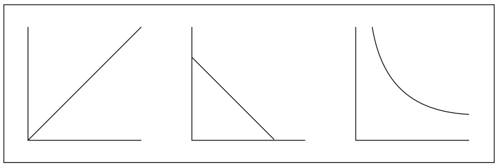
3 反比例の事例「鏡の反射」

(1) 取り上げる資料

身の回りにある反比例することがらは比例ほど多くない。しかし，理科の学習などでも重要な考え方となってくるので，実験を通してじっくりと考える必要がある。第1学年の理科で学習する鏡の反射・入射角と反射角の考えを使った実験を計画した。(図5)

(2) 授業のようす

① xとyの関係はどうなるかグラフの形を予想する。(図6)



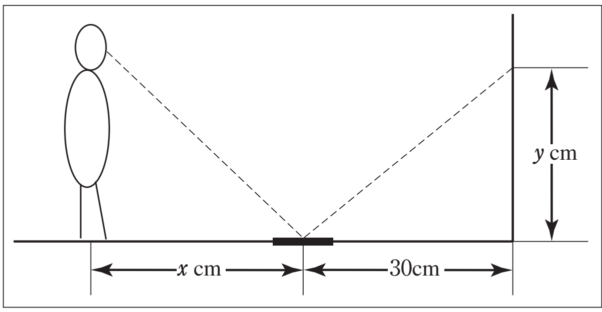
●図6／変化の予想

予想をワークシートにかいてから実験を始める。上の3つがほぼ同じ割合であった。

② 班で分担を決め，実験する。(図7)

分担　実験者・記録者・x計測・y計測（4人班）

x計測者は大きい声で実験者と記録者にxの値を言う。実験者はx計測者の指示で下がる。y計測者は指で直定規をなぞりながら，実験者が「見えた，そこだ」と言ったところを記録者に伝える。



左の図のような設定で，人が鏡から離れると（xが増えると），見える高さyが変わっていきます。

この実験を班ごとに行いましょう。

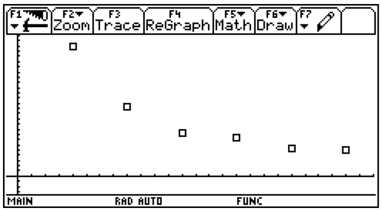
●図5／鏡の反射の実験

③　実験したデータを表にする。

x	50	100	150	200	250	300
y	75	40	25	22	16	15

T：電卓にデータを入力し，グラフに表そう。（**図8**）

●図7／実験のようす



●図8／データをプロット

④T：表やグラフからどんなことに気づきましたか。

P：xが増える（鏡から離れる）とyは減少する（見える位置が低くなる）。

P：xが２倍，３倍…になるとyは1/2倍，1/3…となる。

P：xとyの積は同じようだ。

x	50	100	150	200	250	300
y	75	40	25	22	16	15
xとyの積	3750	4000	3750	4400	4000	4500

T：ということは，このxとyのあいだにどのような関係があるのでしょう。

P：反比例。

⑤T：ほかに気がついたことはありませんか。

P：いくら後ろにさがっても壁の一番下が見えないのだから，グラフはx軸とくっつかない。

P：身長によってyの値が変わる。

⑥T：どうして反比例になるのでしょう。

T：$y=a/x$のaの値をいろいろ変えて一番近いグラフをひいてみましょう。

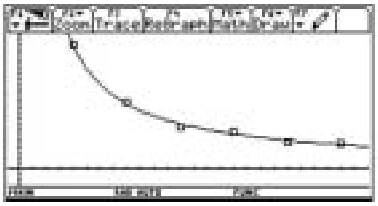
T：aの値をいくらにしましたか。

P：（身長）×30

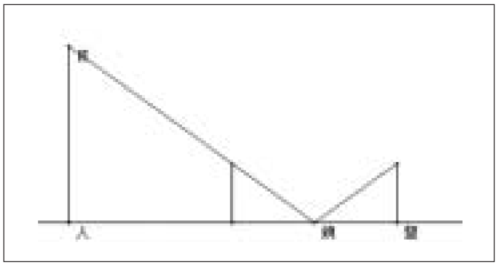
T：比例定数を，（目の高さ）×30とすれば，近い双曲線をかくことができます。これは，**図9**のように，

（目の高さ）：（鏡までの距離）
＝（見える高さ）：30cm

という関係が成り立っているからです。



●図9／双曲線で近似



●図10／実験のmath model

（3）考察と教材の評価

本実践では，グラフ電卓を積極的に利用した。グラフ電卓では，表・式・グラフの関連を有機的に示したり，センサーや表からデータの収集に利用したりできる。ここでは，Data/Matrix Editorという，表とグラフとを関連づける機能を利用した。また，最後の比の説明では，グラフ電卓の作図ツールを用いた。

●図11／グラフ電卓を使う

生徒の感想から

・　最初に予想したとき，まっすぐに下がっていくと考えていた。実験をして点をとってみると曲がっているので，実験を失敗したのかと思った。でも，考えていくうちに反比例になることが当然だと思えてきて，最後の図で納得できた。数学ってすごい。
・　やっている班によって，見える高さ違う。どうしてだろう。分かった，身長の違いだ。僕にとって大発見だった。おもしろかったし，反比例の意味も分かったような気がします。
・　教室から出て，自由に動き回ることができてよかった。本当にしっかり勉強もしたよ。

生徒たちは，「数学的活動の楽しさ」を感じながら，実験を探究に高めていった。実生活におけるさまざまな事象を考察しながら主体的に問題を解決する活動を通して，学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら反比例の学習を深めることができた。

4　一次関数の事例１「桜の開花予想」

(1) 取り上げる資料

旧教科書の統計領域で「相関図・相関表」として取り上げられていた問題に，「桜の開花日」がある（図12）。これをもとに，１時間扱いで実践を行った。

下の表は，仙台の3月の平均気温をx ℃，ソメイヨシノの開花日を4月y日として記録したものである。この表から相関図をつくりなさい。
また，どのような相関があるかを考えなさい。

年次	x (℃)	y (日)
昭和52	4.9	14
53	4.0	21
54	4.9	9
55	3.8	14
56	4.0	13
57	5.1	11
58	4.3	13
59	1.5	28
60	3.7	17
61	3.8	19
62	4.5	10
63	4.1	17
平成元	6.1	3
2	6.2	3
3	5.1	11
4	5.0	6
5	4.6	9
6	4.0	11
7	4.7	11
8	4.3	17

（気象庁調べ）

●図12／桜の開花日

(2) 授業のようす

①課題を把握する。

グラフ電卓を操作する前に，関係があるかないかを予想する。生徒は「３月の平均気温が高い年は早く咲く」といえそうだと予想する。この予想を検証することがこの時間の目標である。

②表を作成し，相関図を表示する。

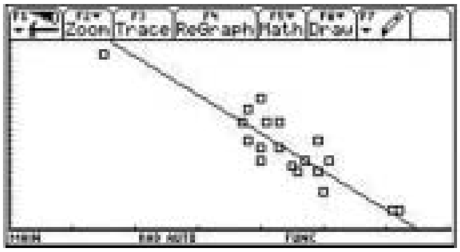
学習課題のデータを入力する。座標軸上に点をプロットし，相関図を作成する。この操作により，負の傾きをもつ一次関数であることがわかる。

③データを回帰する。

線形回帰を使い，この点を回帰する。数回のキー操作で自動的に回帰分析が行われ，回帰直線が表示される。（図13）

この操作で，仙台のソメイヨシノの開花日は，３月の平均気温の一次関数であることを確認できた。また，図14のようにこの直線の式を求めることもできる。

生徒たちは，xとyの間に，$y=-6x+40$という関係があることを認めた。一次関数の式



●図13／線形回帰

からも求められるが，グラフ電卓では，直線上の点の座標を読みとれるので，３月の平均気温が決まれば開花日を直接グラフから求めることができる。３月の平均気温が何度であれば３月中に咲くかなど，自ら課題を設定し，その解決を行った。

(3) 考察と教材の評価

１つのグラフ電卓のData/Matrix Editorにデータを入力しておけば，すべてのグラフ電卓に同じデータを転送し利用できる。生徒たちは興味を持って学習に取り組んでいた。グラフ電卓を使用するときには，互いに相談したり覗きこんだりすることを大切にしている。これによって操作が苦手な生徒も他と同じペースで操作できるようになる。

このような学習では，一次関数を事象の中から探すというのではなく，事象を一次関数とみて考察したり，問題を解決したりする活動が中心となる。

●図14／線形回帰の式

5 一次関数の事例2「人間発電機」

(1) 取り上げる資料

人が片手を握られてからもう一方の手を握るまでにかかる時間を考えてみよう。一人分ではとても早くて計れないので，例えば縦１列分の○人で△秒かかるというように計ってみる。だんだん人数を増やしていこう。クラス全員で何秒かかるだろうか。(図15)

①実験者は手をつないで待つ。先生のよーいドンでスタート。
②前の人に手を握られたら，次の人に手を握って合図する。
③最後の人は握られた手と反対の手を挙げ，先生がストップウォッチを押して計測終了。
④１列ずつ人数を増やしていく。


●図15／人間発電機の様子

(2) 授業のようす

① データの例

人数	4	10	14	19	24	29	35
秒	1.59	2.79	3.77	4.67	6.03	6.90	7.81

② データをグラフ電卓に記録する。

③ 線形回帰を行い，直線を表示する。（図16）

④T：原点を通らないのはどうしてでしょう。誤差でしょうか。

T：人数が，増えても変化しないものがあります。

P：最後の人が合図してから，記録者がストップウォッチを押すまでの時間です。

T：ということは，

> （人間発電機でかかった時間）
> ＝（１人当たりのかかった時間）×（人数）
> ＋（ストップウォッチを押す時間）

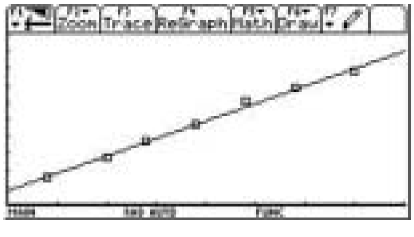
という関係になりますね。

⑤ ●（１人当たりのかかった時間）×（人数）の部分は人数に比例します。

●（ストップウォッチを押す時間）の部分は人数に関係なく一定です。

T：このような関係が一次関数でした。

T：一次関数は，2つの変数x，yについて$y=ax+b$という式で表すことができます。axの部分はxに比例し，bは定数の部分です。



●図16／人間発電機の回帰直線

(3) 考察と教材の評価

生徒は，グラフが直線になることを当然だと受け止める。しかし，切片にまで目が行く生徒は少ない。「原点を通らないのはどうしてでしょう」という発問を行い，理由を考察する。最初は誤差だと考えていた生徒たちも「人数がいくら増えても，変化しないものがあるのではないかと考えるようになる。それが，最後の人の合図の後，記録者がストップウォッチを押すまでの時間であることに気づく。（１人当たりのかかった時間）×（人数）の部分は人数に比例し，（ストップウォッチを押す時間）の部分は人数に関係なく一定である。これは一次関数に他ならない。実験を通してaxの部分はxに比例し，bは定数の部分であることの意味を確認できた。

6 まとめ

数量関係の領域では，実験・調査・観察を単元の導入で取り上げることが多い。しかし，展開・まとめの段階では，数学的な処理が中心となり抽象的な概念のままで終了してしまう場合が多い。そのため数学的な処理の結果のみが知識として固定し，実現象から離れた現実感のないものなってしまいがちである。実験・調査・観察を単なる動機づけで終わらせるのではなく，学習の成果・ゴールとして扱いたいものである。

ある測定値について何らかの判断をするとき，２つの変量の間に対応の規則が存在すれば，関数関係として数理的に処理することができる。しかし実際の資料では，明白な対応の規則を認められない場合が多い。そのような場合に相関関係を統計的に考察することになる。従来統計の相関で扱ってきたデータと一次関数で取り上げるデータとの間には内容的な違いは少ない。違う点は，データの量と相関の度合いである。これらは，テクノロジーを利用することで解決できる。本事例のように，統計の単元で学習してきた素材の中には，一次関数の内容として関数関係を考察する能力を養うために有効なものが多くある。

授業後の感想を読むと，実験や探究につい

てのコメントが中心であり，グラフ電卓の珍しさに言及している生徒はほとんどいない。グラフ電卓などのテクノロジーは，生徒自身が主体的に学習したり，数学的活動を行ったりすることを支える道具なのである。また，実験や観察に課題意識を持って取り組むようにするためには，活動前に結果を予想させ，その仮説を実験や観察によって検証していくことが，効果的であった。

実現象の中から必要な部分だけを取り出し考察することは，数学的活動の一つのあり方である。事象を関数として考察するとき，グラフ電卓とグラフ電卓外の活動を連携させることで，より豊かな数学活動が展開できるようになる。

数学学習において，知識理解技能偏重へ批判から操作活動重視の流れが目立つ。しかし，大切なのは操作活動そのものではなく，それを通して数学的な意味を認識することである。本稿で示した4つの事例のような数学的モデリングを取り入れた一連の学習は，数学の有用性を感得させ，数学を積極的に活用しようとする態度を育成するのに有効であろう。

[参考文献]

⑴杉山吉茂 藤井斉亮 熊谷光一 清水美憲 植野美穂（1998），高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発に関する研究，第31回数学教育論文発表会論文集，pp.293-298